

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Дифференциальная геометрия
по направлению:	Фотоника и оптоинформатика
профиль подготовки:	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 1 (осенний) - Дифференцированный зачет
- 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

- лекции: 60 час.
- семинары: 30 час.
- лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 105 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составил: И.В. Каржеманов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Физтех-кластера академической и научной карьеры 09.07.2024

Аннотация

Работа современного исследователя в области теоретической и математической физики требует серьезной математической эрудиции. Важнейшие современные статьи по теорфизике используют широкий спектр математических терминов, понятий, конструкций. К важнейшим разделам математики с этой точки зрения относятся дифференциальная геометрия и топология.

Данный курс направлен на то, чтобы подготовить студентов-физиков к пониманию математического языка современной теорфизики. В курсе объясняются наиболее фундаментальные геометрические понятия и конструкции, относящиеся к теории гладких многообразий, дифференциальному и интегральному исчислению на многообразиях, топологии и геометрии векторных расслоений, римановой геометрии. По своему содержанию курс чисто математический, но его не следует сравнивать с полномасштабными курсами, например, по дифференциальной геометрии, как ее преподают студентам-математикам. Это вводный курс по указанным разделам математики для студентов-физиков.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение основ дифференциальной геометрии и топологии в объеме, необходимом будущим физикам-теоретикам.

Задачи дисциплины

Сформировать представление о дифференциальной геометрии и топологии. Обучить студентов основным методам решения задач по этому разделу, связанных с проблемами теоретической физики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач в области фотоники и оптоинформатики
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований в области фотоники и оптоинформатики к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основы дифференциальной геометрии и топологии.

уметь:

- вычислять основные геометрические и топологические характеристики в базовых случаях.

владеть:

- методами решения задач по дифференциальной геометрии и топологии.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Линейная алгебра	4	2		6
2	Координаты, замены координат. Многообразия	4	2		6
3	Гладкие отображения, диффеоморфизмы	4	2		6
4	Векторные поля и инфинитезимальные диффеоморфизмы	4	2		6
5	Подмногообразия	4	2		7
6	Комплекс де Рама, локальная теория	6	3		7
7	Интегрирование дифференциальных форм	4	2		7
8	Комплекс де Рама, глобальная теория	4	2		8
9	Векторные расслоения	4	2		8
10	Гомотопические группы	4	2		8
11	Связность в расслоении	4	2		9
12	Риманова геометрия	4	2		9
13	Метрическая форма объема	4	2		9
14	Метрическая связность. Кручение и кривизна	6	3		9
Итого часов		60	30		105
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Линейная алгебра

Обзор основных понятий линейной алгебры. Тензорная алгебра, симметрические и кососимметрические тензоры, операции с тензорами, кольца, дифференцирования, симметрическая и внешняя алгебра, коммутативные градуированные кольца.

2. Координаты, замены координат. Многообразия

Замены координат в (области в) R^n , касательные векторы, векторные и тензорные поля. Многообразия, касательное расслоение, векторные и тензорные поля, операции с ними. Дифференциальные операторы, векторные поля и касательные расслоения, гладкие отображения и диффеоморфизмы.

3. Гладкие отображения, диффеоморфизмы

Аппроксимация непрерывных отображений гладкими. Теорема Сарда. Трансверсальная регулярность. Функции Морса.

4. Векторные поля и инфинитезимальные диффеоморфизмы

Инвариантные относительно диффеоморфизмов операции и дифференциальные операторы, обратный образ ковариантных тензорных полей, инфинитезимальные диффеоморфизмы и векторные поля.

5. Подмногообразия

Распределения в касательном расслоении, условие интегрируемости, теорема Фробениуса, касательное пространство к подмногообразию, индуцированная метрика, распределения в касательном расслоении, вполне интегрируемость и инволютивность, голономный и неголономный репер.

6. Комплекс де Рама, локальная теория

Комплекс де Рама - определение. Теорема де Рама. Частные случаи когомологий де Рама.

7. Интегрирование дифференциальных форм

Интегрирование дифференциальных форм по подмногообразиям. Теорема Стокса.

Семестр: 2 (Весенний)

8. Комплекс де Рама, глобальная теория

Комплекс де Рама: глобальная теория. Лемма Пуанкаре, действие диффеоморфизмов.

9. Векторные расслоения

Определение и примеры векторных расслоений. Основные конструкции расслоений, изоморфизм расслоений, тривиальные и нетривиальные расслоения, сечения векторных расслоений, выбор локальной тривиализации, касательное и кокасательное расслоения, операции с векторными расслоениями, подрасслоения.

10. Гомотопические группы

Определения, примеры вычислений, применение в теории векторных расслоений, гомотопические группы и векторные расслоения, комплексные расслоения, главное расслоение, ассоциированные расслоения, примеры расслоений, как из векторного расслоения получить главное.

11. Связность в расслоении

Связность, параллельный перенос кривизна связности, упорядоченная экспонента. Группа голономии, локальная и глобальная. Плоская связность. Связность в главном расслоении, связность в ассоциированном расслоении.

12. Риманова геометрия

Функционалы действия в теории поля на римановом многообразии. Оператор Лапласа. Псевдориманова геометрия.

13. Метрическая форма объёма

Метрика, геодезические, изометрии, векторы Киллинга.

14. Метрическая связность. Кручение и кривизна

Оператор ковариантной производной, спин-связность и символ Кристоффеля. Тензор Римана, тождества Риччи и Бьянки.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, при необходимости медиапроектор, экран.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics (2003)
2. L.W. Tu, An Introduction to Manifolds (2011)
3. L.W. Tu, Differential Geometry (2017)
4. Современная геометрия: Методы и приложения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. - 5-е изд., испр. - М. : Эдиториал УРСС ; Добросвет, 2001. - Т. 2 : Геометрия и топология многообразий. - 2001. - 296 с.

Дополнительная литература

1. Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. - М.: Мир, 1976. - 284 с.
2. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Том 1,2. - М.: Мир, 1982. - 366 с.
3. М. О. Катанаев. Геометрические методы в математической физике

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Представление материала на доске и/или при помощи медиапроектора.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента в соответствии с данными в рабочей программе. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- при необходимости подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, дифференцированному зачету, экзамену.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Фотоника и оптоинформатика
профиль подготовки:	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры (Современная фундаментальная математика)
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
1 (осенний) - Дифференцированный зачет	
2 (весенний) - Экзамен	
Разработчик:	И.В. Каржеманов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач в области фотоники и оптоинформатики
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований в области фотоники и оптоинформатики к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дифференциальная геометрия» обучающийся должен:

знать:

- основы дифференциальной геометрии и топологии.

уметь:

- вычислять основные геометрические и топологические характеристики в базовых случаях.

владеть:

- методами решения задач по дифференциальной геометрии и топологии.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для подготовки к дифференцированному зачёту в 9 семестре:

1. Ассоциативность произведения в алгебре симметрических и кососимметрических тензоров.
 - 2.Связь тождества Якоби и понятия дифференцирования.
 - 3.Условие интегрируемости распределения в касательном расслоении.
 - 4.Фундаментальная группа. Примеры неодносвязных многообразий.
 - 5.Оператор Лапласа на римановом многообразии.
 6. Доказать, что на замкнутом многообразии каждое векторное поле является полным
 - 7 На компактном симплектическом многообразии симплектическая 2-форма не может быть точной.
 - 8 Рассмотрим трехмерное многообразие с краем, представляющее собой тор, заполненный внутри (бублик, или полноторие). Какой простейший способ найти группы (ко)гомологий полнотория?-
 - 9 Привести простейшие примеры многообразий, на которых есть глобальный голономный репер. В каких из этих случаев также имеется глобальная система координат.
 - 10 На компактном многообразии любое бесконечное множество точек содержит нетривиальную (то есть не постоянную) сходящуюся последовательность (или, что то же самое, имеет предельную точку). Равносильное утверждение: на компактном многообразии любое замкнутое подмножество, состоящее из изолированных точек, конечно.
- Докажите все это.

Примеры контрольных заданий для подготовки к экзамену в 10 семестре:

- 1.Вычислить метрику двумерной сферы в угловых координатах и в координатах стереографической проекции.
- 2.Вычислить кривизну двумерной сферы и двумерных гиперboloидов.
- 3.“Найти” изометрии двумерной сферы (явно проверить выполнение уравнения Киллинга).
- 4.Обобщение формулы Картана для внешней производной 3-формы.
- 5.Доказать единственность метрической связности без кручения.
- 6.Классификация комплексных векторных расслоений на сферах.
- 7.Основные тождества для производной Ли.
- 8.Гомотопическая формула Картана.
- 9.Вычислить фундаментальную группу тора.
- 10.Пространства постоянной кривизны. Примеры таких пространств (с доказательством).

Примеры билетов для дифференцированного зачёта (9 семестр):

Билет 1.

1. Ассоциативность произведения в алгебре симметрических и кососимметрических тензоров.
2. Условие интегрируемости распределения в касательном расслоении.

Билет 2.

1. Связь тождества Якоби и понятия дифференцирования.
2. Привести простейшие примеры многообразий, на которых есть глобальный голономный репер. В каких из этих случаев также имеется глобальная система координат.

Примеры экзаменационных билетов (10 семестр):

Билет 1.

- 1.Вычислить фундаментальную группу тора.
- 2.Пространства постоянной кривизны. Примеры таких пространств (с доказательством).

Билет 2.

- 1.Классификация комплексных векторных расслоений на сферах.
- 2.Основные тождества для производной Ли. Гомотопическая формула Картана.

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачёт и экзамен проводятся в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении зачёта и экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.